Développement : Théorème de Plancherel.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématique.

Énoncé :

Théorème de Plancherel : L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

On rappelle des théorèmes avant :

Théorème 1 : Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème (prolongement application uniformément continues) 2 : Soient E et F deux espaces métriques tels que F est complet. Soient A une partie dense de E et $f : A \mapsto F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : E \mapsto F$ qui prolonge f i.e $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
De plus l'application g est uniformément continue.

Proposition 3 : Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in L(E, F)$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si f est uniformément continue.

On rappelle que $\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x)dx$ et $\tilde{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx$.

Résolution

Théorème 4 : La transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui même.

Démonstration : (Voir livre version complète)
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t)dt$ ou $h(x, t) = e^{-ixt} f(t)$ est donc continue en x, intégrable par rapport à t et même dérivable de dérivée $-ite^{-itx} f(t)$.
Or $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$| - ite^{-itx} f(t)| = |t||f(t)| \leq C/t^2$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Comme C/t^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $] - \infty, -1]$ et que la fonction de base est intégrable sur $[-1, 1]$, on a que $x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut même montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ et on a pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-itx} f(t)dt$$

Par i.i.p successives en primitivant $t \mapsto e^{-itx}$ on obtient pour tout entier k et a

$$(ix)^a \mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} (u \mapsto (-iu)^k f(u))^{(a)}(t) dt$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit que $|(ix)^a \mathcal{F}(f)^{(k)}(x)|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, on en déduit de la formule d'inversion de Fourier que

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(f)$$

On en déduit la bijection. □

Lemme 5 : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$$

Démonstration Commençons par montrer que si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) g(x) dx$$

Posons la fonction $h(x, y) = e^{-ixy} f(x) g(y)$, définie sur $\mathbb{R}^2$.
On a $|h(x, y)| = |f(x)||g(y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a que $x \mapsto |f(x)||g(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$(car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).
De plus la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)| dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $g \in L^1(\mathbb{R})$.Par symétrie de x, y et f, g dans la définition de h, on en déduit d'après le théorème de Fubini-Tonelli, les fonctions $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx$ et $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy \right) dx$$

On en déduit bien que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) g(x) dx$$

On pose maintenant $g = \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f})$. Ainsi d'après ce qu'on vient de démontrer on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f}) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f})(x) dx$$

Comme $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème précédent, on a $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et le théorème d'inversion de Fourier nous donne $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f}) = 2\pi \overline{f}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\overline{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \overline{f}(t) dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt} = \overline{\mathcal{F}(f)}(x)$$

On a alors

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(f)}(x) dx$$

et donc on a bien

$$2\pi \|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$$

□

Démonstration (du théorème) : Comme $\mathcal{F}$ est linéaire, alors $\mathcal{P}$ est aussi linéaire. Comme $\mathcal{P}$ est linéaire, alors $\mathcal{P}$ est continue grâce au lemme précédent.
Ainsi $\mathcal{P}$ est uniformément continue d'après la proposition 3. Comme l'espace $L^2(\mathbb{R})$ est complet (Riesz-Fischer) et que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (théorème 1), alors d'après le théorème de

prolongement des applications uniformément continues (théorème 2), $\mathcal{P}$ peut être prolongée à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de façon unique. On la note encore $\mathcal{P}$ par abus de notation.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Par densité, il existe une suite de fonction (f_n) de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que f_n converge vers f en norme $\|.\|_2$. Par continuité de $\mathcal{P}$, la suite $\mathcal{P}(f_n)$ converge vers $\mathcal{P}(f)$ en norme $L^2(\mathbb{R})$ et comme $\|\mathcal{P}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$ (d'après le lemme précédent) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on conclus que $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\mathcal{P}$ est une isométrie linéaire.
Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g)$. Par linéarité de $\mathcal{P}$, on a $\mathcal{P}(f-g) = 0$ et $\|\mathcal{P}(f-g)\|_2 = \|f-g\|_2$. On en déduit que $f = g$ et donc $\mathcal{P}$ est injectif.
Montrons que $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est une partie fermée de $L^2(\mathbb{R})$. Soit (f_n) une suite de $L^2(\mathbb{R})$ telle que la suite $(\mathcal{P}(f_n))$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{P}(f_n)$ est une suite de Cauchy (car $L^2(\mathbb{R})$ complet). Montrons que (f_n) est aussi une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, $\|\mathcal{P}(f_{n+p}) - \mathcal{P}(f_n)\|_2 \leq \epsilon$. Par isométrie, on a $\|f_{n+p} - f_n\|_2 \leq \epsilon$ et (f_n) est une suite de Cauchy. Encore par complétude de $L^2(\mathbb{R})$, (f_n) converge vers $f \in L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de $\mathcal{P}$, la suite $\mathcal{P}(f_n)$ converge vers $\mathcal{P}(f)$. Comme $\mathcal{P}(f) \in \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$, on en déduit que l'espace $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé.
Montrons ensuite que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $f = \mathcal{F}(g)$. Donc $f \in \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ et donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$.
On sait que $\mathcal{P}$ est surjective sur $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$, or $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, car $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
On a donc $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{P}$ est surjective sur $L^2(\mathbb{R})$. One déduit donc que $\mathcal{P}$ est bien un isomorphisme isométrique.